расположения рабочих мест или оборудования, изменение интерьера, требований к освещенности на различных участках объекта и т.д.

1.Справочная книга по светотехнике / Под ред. Ю.Б.Айзенберга. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 471 с.

2.Айзенберг Ю.Б., Рожкова Н.В. Энергосбережение в светотехнических установках. – М., 1999.

3.Брезинский В.Г., Дьяков Е.Д., Кравченко Ю.П. Применение гибкого корпуса для перераспределения светового потока светильника // Коммунальное хозяйство городов: Науч.-техн. сб. Вып.38. – К.: Техніка, 2002. – С. 235-237.

4.Зубрич К.И. Влияние вида освещения на функции зрения и на общую работоспособность человека // Коммунальное хозяйство городов: Науч.-техн. сб. Вып.38. – К.: Техніка, 2002. – С. 233-235.

5.Истомин Е.П, Мирошниченко С.П, Скоков А.А. САУ электроприводами механизмов доменной печи №7 КГГМК «Криворожсталь». – К., 2002. – С.117.

Получено 22.09.2003

УДК 621.3

А.А.ХАРИСОВ, канд. техн. наук
Харьковская государственная академия городского хозяйства

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИЛЫ ЯВЛЕНИЯ ПИНЧ-ЭФФЕКТА В УЕДИНЕННЫХ ПРЯМЫХ КРУГЛЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРОВОДНИКАХ ПРИ ПОСТОЯННОМ ТОКЕ

С использованием методов электродинамики сплошных сред и учетом нормального («колоколообразного») распределения плотности тока выведена уточненная формула расчета электродинамической силы пинч-эффекта для уединенных прямых круглых цилиндрических проводников.

Как известно, в проводниках с постоянным электрическим током под воздействием собственного магнитного поля возникает явление пинч-эффекта или, иными словами, явление стягивания субъектов носителей электрического тока к центру инерции поперечного сечения проводника. В этой связи в поперечном сечении проводника, естественно, формируется не равномерное распределение плотности тока, как это обычно априорно принимается при электродинамических и других связанных с распределением плотности тока расчетах, а нормальное («колоколообразное») распределение. Отмеченные выше замечания сделаны не случайно, поскольку именно от правильно заданного (действительного) распределения плотности тока в проводнике зависит адекватность взаимодействия тока с магнитным полем в проводнике ее действительному значению.

Для вывода расчетной формулы электродинамической силы явления пинч-эффекта воспользуемся нормальным («колоколообразным») распределением плотности тока, использование которого позволяет получить расчетную формулу омического сопротивления уединенного прямого круглого цилиндрического проводника, точно совпадающую с законом Ома [1],

$$J_0(x,y)=\frac{I}{\pi\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_0}{}\right)^2}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_0}{}\right)^2}\right]$$

или (1)

$$J_0(\vec{r})=\frac{I}{\pi\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_0}{}\right)^2}\exp\left[-\frac{\vec{r}^{\,2}}{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_0}{}\right)^2}\right],$$

где x, y и $\vec{r}$ – текущие координаты в декартовой прямоугольной или цилиндрической системе координат в плоскости поперечного сечения проводника с началом координат в точке центра инерции прямого цилиндрического проводника; $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}J(x,y)dy$ – полный ток уединенного проводника; r_0 – радиус (или эффективный радиус) поперечного сечения уединенного прямого цилиндрического проводника.

В качестве исходной расчетной формулы принимаем общее выражение электродинамики сплошных сред для определения электродинамической силы, воздействующей на проводник с током, помещенный в магнитное поле

$$\vec{F}=\mu\mu_0\int\left[\vec{J}\vec{H}\right]d\vec{v}\,, \tag{2}$$

где μ, μ_0 – соответственно, магнитная проницаемость материала проводника и магнитная постоянная; $\vec{J}$ – вектор плотности тока в направлении оси симметрии проводника; $\vec{H}$ – вектор напряженности магнитного поля; $\int ...d\vec{v}$ – интегрирование ведется по объему проводника.

Применительно к данной задаче расчетную формулу (2) преобразуем к виду

$$F_r = -\mu\mu_0 r_0 \gamma_0(T)\int \left[\vec{E}\vec{H}\right] d\vec{f}\ , \tag{3}$$

где $\gamma_0(T)$ – электропроводность материала проводника; $\vec{E}$, $\vec{H}$ – вектор напряженности электрического и магнитного поля, создаваемые током проводника; $\int ...d\vec{f}$ – интегрирование ведется по поверхности проводника.

Вследствие осевой симметрии проводника относительно распределения плотности тока задача удовлетворяет уравнению Лапласа.

Граничным условием уравнения Лапласа принимаем проекцию напряженности электрического поля по оси z в точке $z = 0$, делящей проводник на две зеркально симметричные половины

$$E_z(x,y) = \frac{I}{\pi\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_0^2}{l}\right)^2 \gamma_0(T)} \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_0^2}{l}\right)^2}\right], \tag{4}$$

где l – длина прямого круглого цилиндрического проводника.

Решение задачи достаточно найти в области $z > 0$.

Так как напряженность электрического поля по осям x, y не ограничена, то для решения уравнения Лапласа можно применить метод разложения полей в интеграл Фурье.

Учитывая, что ток постоянный, для определения полей воспользуемся электростатическими уравнениями Максвелла

$$\begin{gathered} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0\,; \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}\,; \\ \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0\,; \quad \frac{\partial H_y}{\partial y} - \frac{\partial H_x}{\partial x} = \gamma_0(T)E_z\,. \end{gathered} \tag{5}$$

Переходя к компонентам поля Фурье, получим

$$E_{xk} = -j\frac{k_x}{k^2}\frac{dE_{zk}}{dz}; \quad E_{yk} = -j\frac{k_y}{k^2}\frac{dE_{zk}}{dz};$$

$$H_{xk} = -j\gamma_0(T)\frac{k_y E_{zk}}{k^2}; \quad H_{yk} = j\gamma_0(T)\frac{k_x E_{zk}}{k^2}; \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}. \quad (6)$$

В общей форме значение компоненты поля Фурье E_{zk}, удовлетворяющее граничному условию (4), принимаем в виде

$$E_{zk} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty E_k \exp\left[j\vec{k}\vec{r} - kz\right]d\vec{k}, \quad (7)$$

где

$$E_k = \frac{1}{\gamma_0(T)}\int J_0(\vec{r})\exp(-j\vec{k}\vec{r}) \quad (8)$$

– постоянная интегрирования.

Используем обратное преобразование Фурье к (6), приходим к решению системы электростатических уравнений Максвелла вида

$$E_x(\vec{r}) = \frac{j}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} E_k \exp\left[j\vec{k}\vec{r} - kz\right]\frac{k_x}{k}d\vec{k};$$

$$E_y(\vec{r}) = \frac{j}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} E_k \exp\left[j\vec{k}\vec{r} - kz\right]\frac{k_y}{k}d\vec{k};$$

$$H_x(\vec{r}) = -\frac{j\gamma_0(T)}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} E_k \exp\left[j\vec{k}\vec{r} - kz\right]\frac{k_y}{k}d\vec{k}; \quad (9)$$

$$H_y(\vec{r}) = \frac{j\gamma_0(T)}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} E_k \exp\left[j\vec{k}\vec{r} - kz\right]\frac{k_x}{k}d\vec{k}.$$

Принимая в уравнениях (9) $z = 0$ и подставляя полученные компоненты электромагнитного поля в (3) вместо векторного произведения компонент электромагнитного поля

$$\left[\vec{E}\vec{H}\right]\Big|_{z=0} = E_x(\vec{r})H_y(\vec{r}) - E_y(\vec{r})H_x(\vec{r}), \quad (10)$$

после преобразований приходим к выражению

$$F_r = -\mu\mu_0 [\gamma_0(T)]^2 r_0 \int_{-\infty}^{\infty} E_k{}^2 \frac{d\vec{k}}{k}. \tag{11}$$

Умножив обе части граничного условия (4) на $\exp(-jk_x x - jk_y y)$ и проинтегрировав его с использованием интеграла Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha\xi^2) d\xi = \sqrt{\pi/\alpha}, \tag{12}$$

находим постоянную интегрирования

$$E_k = \frac{I}{\gamma_0(T)} \exp\left[-\frac{k^2 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \frac{r_0^2}{l} \right)^2}{4} \right]. \tag{13}$$

После подстановки постоянной интегрирования в (11) и перехода в цилиндрическую систему координат в k -пространстве имеем выражение

$$F_r = -\mu\mu_0 \frac{I^2 r_0}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{2k^2 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \frac{r_0^2}{l} \right)^2}{4} \right] \int_0^{2\pi} \exp(jk\cos\varphi) d\varphi dk \cdot \tag{14}$$

Заменив в (14) последний интеграл функцией Бесселя

$$F_r = -\mu\mu_0 \frac{I^2 r_0}{2\pi} \int_0^{\infty} J_0(k) \exp\left[-\frac{2k^2 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \frac{r_0^2}{l} \right)^2}{4} \right] dk \tag{15}$$

и воспользовавшись для вычисления интеграла по dk в (15) известным соотношением [2]

$$\int_0^{\infty} J_0(k)\exp\left[-\frac{2k^2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_0^2}{l}\right)^2}{4}\right]dk=\left[\frac{\pi}{2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_0^2}{l}\right)^2}\right]^{1/2}=\frac{2l}{r_0^2}, \qquad (16)$$

получаем формулу расчета электродинамической силы явления пинч-эффекта при нормальном распределении плотности тока для уединенных прямых круглых цилиндрических проводников

$$F_r=-\mu\mu_0\frac{I^2 l}{\pi r_0}. \qquad (17)$$

И в заключение для сравнения выведем выражение электродинамической силы пинч-эффекта в уединенных прямых цилиндрических проводниках в предположении равномерного распределения плотности тока

$$J_0(\vec{r})=\begin{cases}\dfrac{I}{\pi r_0^2}, & |\vec{r}|\le r_0,\\ 0, & |\vec{r}|>r_0.\end{cases} \qquad (18)$$

При таком распределении плотности тока граничное условие задачи принимает вид

$$E_z(\vec{r})=\frac{I}{\gamma_0(T)\pi\left(\frac{r_0^2}{l}\right)^2}, \quad \vec{r}\le r_0. \qquad (19)$$

Подставляя (19) в (8), получим постоянную интегрирования

$$E_k=\frac{1}{\gamma_0(T)}\int\frac{I}{\pi\left(\frac{r_0^2}{l}\right)^2}\exp(j\vec{k}\vec{r}). \qquad (20)$$

После подстановки постоянной интегрирования в (11) и ввода цилиндрической системы координат в $\vec{k}$ -пространстве приходим к выражению

$$F_r = -\mu\mu_0 \frac{I^2 r_0}{4\pi\left(\frac{r_0^2}{l}\right)^2} \int\limits_0^{\infty} \frac{J_1^2\left(k\frac{r_0^2}{l}\right)}{k^2} dk\,, \tag{21}$$

где J_1 – функция Бесселя.

Значение интеграла в (21) известно [2]

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{J_1^2\left(k\frac{r_0^2}{l}\right)}{k^2} dk = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{r_0^2}{l}\,. \tag{22}$$

Заменяя интеграл в (21) его значением, получаем формулу электродинамической силы пинч-эффекта для уединенных прямых круглых цилиндрических проводников при условии равномерного распределения плотности тока

$$F_r = -\mu\mu_0 \frac{I^2 l}{3\pi^2 r_0}\,. \tag{23}$$

Как видим, значение электродинамической силы пинч-эффекта при равномерном распределении плотности тока в уединенном прямом круглом цилиндрическом проводнике в 3π раз меньше, чем при нормальном распределении плотности тока.

1.Харисов А.А. Исследование реального статистического распределения плотности постоянного электрического тока в уединенных прямых цилиндрических проводниках при установившихся токовых и температурных режимах // Коммунальное хозяйство городов: Науч.-техн. сб. Вып.51. – К.: Техніка, 2003. – С.154-161.

2.Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм и произведений. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 1100 с.

Получено 16.09.2003